Félag raungreinakennara
Íslenska stærðfræðafélagið

Laugardagur, 5. mars 2011
10:00 - 14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2010–2011
Lausnir á dæmum í úrslitakeppni

Dæmi 1

Finnið öll pör af heiltölum (a, b), ekki neikvæðum, sem að uppfylla jöfnuna:

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13$$

Lausn A: Skrifum jöfnuna sem $(2^a - 3) \cdot 3^b + 2^a = 13$ og tökum eftir því að ef $a \geq 2$ þá er fyrri liðurinn jákvæður, svo $2^a < 13$ og því $a < 4$. Því dugir að skoða a á bilinu frá 0 upp í 3. Hvorki $a = 0$ né $a = 1$ gefa lausn því í báðum tilfellum er $(2^a - 3) \cdot 3^b < 0 < 13 - 2^a$. Ef $a = 2$ þá fæst $(4 - 3) \cdot 3^b + 4 = 13$ svo að $3^b = 9$ og því $b = 2$. Ef $a = 3$ þá fæst $(8 - 3) \cdot 3^b + 8 = 13$ svo $3^b = 1$ og því $b = 0$. Það eru því tvær lausnir: $(2, 2)$ og $(3, 0)$.

Lausn B: Ef jafnan er umrituð sem $2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a - 3 = 10$ þá má þátta vinstri hliðina:

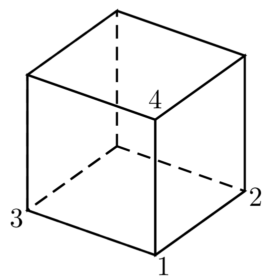
$$(2^a - 3)(3^b + 1) = 10$$

og þar sem $3^b + 1$ er slétt tala og jákvæð fyrir öll gildi b, þá er annað hvort $3^b + 1 = 2$ og $2^a - 3 = 5$ eða $3^b + 1 = 10$ og $2^a - 3 = 1$. Í fyrra tilfellinu er $(a, b) = (3, 0)$ og í því seinna er $(a, b) = (2, 2)$.

Dæmi 2

Hornpunktar tenings eru tölusettir með tölunum frá 1 upp í 8 (hver tala notuð einu sinni). Fyrir hverja brún er mynduð summa talnanna á endapunktum hennar. Er hægt að tölusetja hornpunktana á þann veg að summurnar fyrir brúnirnar séu ólíkar?

Lausn: Athugum að lægsta mögulega summan er $1 + 2 = 3$ og sú hæsta $7 + 8 = 15$. Á þessu bili eru 13 heiltölur svo að ef allar 12 brúnir teningsins hafa ólíkar summur þarf að nota allar þessar tölur nema eina.



Gerum fyrst ráð fyrir að summan sem vantar sé í efri hlutanum (9 eða hærri) og skoðum þá lægstu summurnar. Til að fá summuna 3 þarf ein brún að tengja 1 og 2. Og til að fá summuna 4 þarf brún að tengja 1 og 3. En þá eru 2 og 3 á hornpunktum sem ekki tengjast, svo að 5 verður að fást með því að 1 og 4 tengist. Þar með tengist hornpunkturinn með 1 hornpunktum með tölunum 2, 3 og 4.

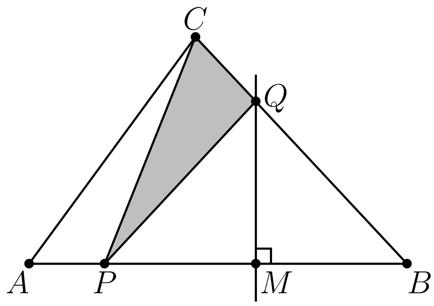
Skoðum næst summuna 6. Nú geta 1 og 5 er ekki legið á aðliggjandi hornum, af því að það er þegar búið á áveða hvaða tölur eru á hornunum sem tengjast 1. Ennfremur tengjast 2 og 4 báðir 1 svo þeir tengjast ekki sjálfir svo það er ekki hægt að fá 6 heldur þannig. Þar með er enginn brún með hornasummuna 6 sem er mótsögn.

Ef summan sem vantar er í neðri hlutanum (minni en 9) þá leiðir vegna samhverfu sams konar röksemdafærsla til mótsagnar fyrir stærstu summurnar.

Ath: Í stað þess að skipta í tilfelli eftir því hvaða summu vantar, þá er hægt að ákvarða að 9 er eini möguleikinn sem gæti hugsanlega virkað: Hver hornpunktur tengist þremur brúnum svo að heildarsumman yfir allar brúnirnar verður að vera $3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 8) = 108$. En $3 + 4 + \cdots + 15 = 117$ og $117 - 108 = 9$, svo að ef summur brúnanna eru ólíkar þá eru þær jafnar tölunun $3, 4, \ldots, 15$ að 9 undanskilinni.

Dæmi 3

Í þríhyrningi ABC skiptir punktur P hliðinni AB í hlutföllunum $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{4}$. Miðþverill striksins PB sker hliðina BC í punkti Q. Finnið BC ef vitað er að $AC = 7$ og $F(PQC) = \frac{4}{25}F(ABC)$, þar sem $F(XYZ)$ táknar flatarmál þríhyrningsins XYZ.



Lausn: Gefið er að $PB = 4AP$. Þar sem $AP = \frac{1}{5}AB$ þá er $F(APC) = \frac{1}{5}F(ABC)$ og þar sem gefið er að $F(PQC) = \frac{4}{25}F(ABC)$ þá er $F(PQB) = \frac{16}{25}F(ABC)$. Þar með er $F(PQB) = 4F(PQC)$. Þar sem CQP og QPB hafa sömu hæð mælda frá P á línuna CB þá verður $QB = 4CQ$. Þá eru þríhyrningarnir ABC og PBQ einslaga (vegna þess að $BP/BA = BQ/BC$) og því er

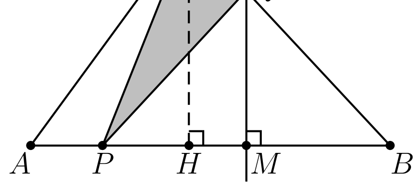
$$\frac{AC}{PQ} = \frac{CB}{BQ}.$$

Miðþverillinn sker strikið PB í punkti M sem samkvæmt skilgreiningu er miðpunktur PB, svo að $PQ = BQ$ vegna samhverfu um QM og þar með er $CB = AC = 7$.

Ath: Önnur leið er skoða hæðir á AB. Lausnin byrjar eins, en þá fæst

$$\frac{F(PBQ)}{F(PBC)} = \frac{16/25 \cdot F(ABC)}{4/5 \cdot F(ABC)} = \frac{4}{5}$$

og af því leiðir að $QM = \frac{4}{5}CH$, þar sem H er fótpunktur hæðarinnar frá C niður á AB.



Rétthyrndu þríhyrningarnir MBQ og HBC eru einslaga svo að $HB = \frac{5}{4}MB = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5}AB = \frac{1}{2}AB$, sem þýðir að H er miðpunktur AB. En þá er þríhyrningurinn ABC samhverfur um CH og því jafnarma, svo að $BC = AC = 7$.

Dæmi 4

Jóhanna hleypur daglega annað hvort a kílómetra eða b kílómetra, þar sem a og b eru jákvæðar heiltölur og $a > b$. Jóhanna getur hlaupið nákvæmlega 100 kílómetra á 9 dögum eða 11 dögum en ekki á 10 dögum. Finnið öll hugsanleg gildi á a og b.

Lausn: Við verðum að hafa $b \leq 9$ því annars hlypi Jóhanna minnst 110 kílómetra á 11 dögum. Eins er $a \geq 12$ því annars kæmist Jóhanna lengst 99 kílómetra á 9 dögum. Ef Jóhanna fer lengri vegalengdina x daga af 9 dögunum og y daga af 11 dögunum þá gildir

$$ax + b(9 - x) = 100 \qquad \text{og} \qquad ay + b(11 - y) = 100$$

það er

$$(a - b)x = 100 - 9b \qquad \text{og} \qquad (a - b)y = 100 - 11b.$$

Af þessu leiðir að $a - b$ gengur upp í bæði $100 - 9b$ og $100 - 11b$, og þar með upp í mismuninn $2b$. Þá þarf $a - b$ að ganga upp í stærsta samdeili þessara talna sem eftirfarandi tafla sýnir fyrir $1 \leq b \leq 9$:

b	$100 - 9b$	$100 - 11b$	ssd
1	91	89	1
2	82	78	2
3	73	67	1
4	64	56	8
5	55	45	5
6	46	34	2
7	37	23	1
8	28	12	4
9	19	1	1

Nú má $a - b$ ekki ganga upp í $100 - 10b$ (því þá gæti Jóhanna hlaupið nákvæmlega 100 km á 10 dögum), og þar með gengur $a - b$ ekki heldur upp í b. Í aðeins einu tilfelli er hægt að velja þátt í stærsta samdeilinum sem ekki gengur upp í b. Því er $b = 4$ og $a = 12$ eina lausnin.

Dæmi 5

Finnið allar heiltölur a og b þannig að $(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$.

Lausn: Margföldum upp úr svigum og einföldum:

$$a^4 + a^3b^3 + ab + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$a^3b^3 + ab = 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3$$

Ef $ab = 0$ þá gildir jafnan klárlega og því eru öll pör (a, b) af gerðinni $(n, 0)$ og $(0, n)$ lausnir fyrir hvaða heilu tölu n sem er. Annars, ef $ab \neq 0$, þá má deila út ab og fá

$$a^2b^2 + 1 = 4a^2 + 6ab + 4b^2$$
$$a^2b^2 + 2ab + 1 = 4a^2 + 8ab + 4b^2$$
$$(ab + 1)^2 = 4(a + b)^2$$

svo að annað hvort er $ab+1 = 2(a+b)$ eða $ab+1 = -2(a+b)$. Í fyrra tilfellinu fæst

$$0 = ab+1-2a-2b = (a-2)(b-2)-3 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)(b-2) = 3$$

svo að $(a,b) \in \{(-1,1),(1,-1),(3,5),(5,3)\}$, en í seinna tilfellinu

$$0 = ab+1+2a+2b = (a+2)(b+2)-3 \quad \Leftrightarrow \quad (a+2)(b+2) = 3$$

svo að $(a,b) \in \{(-5,-3),(-3,-5),(-1,1),(1,-1)\}$. Auðvelt er að sjá með því að rekja sig aftur á bak að þetta eru allt lausnir á upphaflegu jöfnunni. Lausnirnar eru því $(-5,-3)$, $(-3,-5)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(n,0)$ og $(0,n)$ þar sem n getur verið hvaða heiltala sem er.

Dæmi 6

Leyfilegar tilfærslur frá einni jákvæðri heiltölu til annarrar eru sem hér segir:

(a) Frá n má fara til $2n$ og öfugt.

(b) Frá n má fara til $3n+1$ og öfugt.

Sannið að sama hvar tilfærslur hefjast, alltaf má komast í 1 með endanlega mörgum tilfærslum.

Lausn: Hugmyndin er að sýna að frá sérhverri heiltölu $m > 1$ megi komast með endalegum fjölda tilfærslna í jákvæða heiltölu sem er minni en m. Sé það síðan endurtekið nógu oft má að lokum komast niður í 1.

Um töluna m gildir eitt af þrennu:

$$m = 3k, \quad m = 3k+1 \quad \text{eða} \quad m = 3k+2.$$

Ef $m = 3k+1$ dugar ein tilfærsla: $3k+1 \longrightarrow k$.
Ef $m = 3k+2$ duga tvær tilfærslur: $3k+2 \longrightarrow 6k+4 \longrightarrow 2k+1$.
Ef $m = 3k$, athugum eftirfarandi röð af tilfærslum:

$$3k \longrightarrow 9k+1 \longrightarrow 18k+2 \longrightarrow 36k+4 \longrightarrow 12k+1 \longrightarrow 4k \longrightarrow 2k \longrightarrow k$$

Ef $m > 1$ má þannig í sérhverju tilfella komast í tölu sem er minni en m. Ef sú tala er 1 þá hættum við, en annars er talan stærri en 1 og við endurtökum leikinn. Þetta hlýtur að taka enda, því það eru bara endanlega margar heiltölur á milli 1 og m.

Ath: Einhverjir vitnuðu í Collatz-tilgátuna sem vissulega er mjög skyld dæmi 6, en þar á milli er hins vegar mikilvægur munur. Í dæminu er leyft að nota tilfærslurnar í báðar áttir og í hvaða röð sem er (meðan útkoman er jákvæð heiltala). En Collatz-tilgátan fjallar um reiknirit þar sem fyrirfram er ákveðið miðað við töluna hver næsta tilfærsla skal vera. Nánar tiltekið, ef m er slétt þá er farið í $m/2$ en ef m er oddatala þá er farið í $3m+1$. Tilgátan segir að sama hvar er byrjað, sé þetta endurtekið nógu oft þá endar ferlið í 1. Hið merkilega er að þetta er ósönnuð tilgáta (og því ekki hægt að nota í lausn dæmisins).